

Equation différentielle et méthode d'Euler

Énoncé

Soit l'équation différentielle : $y' = -2y$. On admet que la fonction f solution de cette équation, définie sur \mathbb{R} et vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f telle que $f(x) = \exp(-2x)$.

On cherche à comparer $f(1)$ aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.

On se place sur l'intervalle $[0, 1]$ en prenant un pas h égal à $\frac{1}{n}$, où n est un entier supérieur à 2. On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés M_k , d'abscisse x_k et d'ordonnée y_k telles que :

$x_0 = 0, y_0 = 1$, et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$, $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}$ et $y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) y_k$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n , y_k est une valeur approchée de $f(x_k)$.

1. Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée).

Appeler l'examineur pour faire vérifier l'expression obtenue pour y_k .

2. À l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

| Valeur de n égale à | k | x_k | y_k |
|-----------------------|-----|-------|-------|
| 10 | 0 | 0 | 1 |
| Pas égal à | 1 | 0,1 | 0,8 |
| 0,1 | 2 | 0,2 | |
| | 3 | | |
| | 4 | | |
| | 5 | | |
| | 6 | | |
| | 7 | | |
| | 8 | | |
| | 9 | | |
| | 10 | | |

3. En déduire une valeur approchée de $f(1)$.

Appeler l'examineur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec $n = 10$. Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque $n = 20$ ou $n = 30$.

4. Réitérer la méthode dans les cas $n = 20$ puis $n = 30$ et donner les valeurs approchées de $f(1)$ ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

| Valeur de n égale à | 10 | 20 | 30 | Valeur approchée de e^{-2} |
|---------------------------|----|----|----|------------------------------|
| Valeur approchée de y_n | | | | |

5. À l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite des points M_k obtenue à la question 4., dans le cas où n est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

Appeler l'examineur et lui présenter la représentation graphique réalisée.

Production demandée

- Calcul de y_k en fonction de k ;
 - Réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur ;
 - Détermination de valeurs approchées de $f(1)$ (tableau rempli) ;
 - Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.
-