Exercice 1 (10 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 3$ où y désigne une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels, y' désigne sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer une solution constante de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation (E).
3. La courbe $\mathscr{C}$ représentée en annexe est la représentation graphique d'une solution f de l'équation différentielle (E). En utilisant les propriétés graphiques de cette courbe, déterminer l'expression de $f(x)$.

Partie B : Étude statistique

Un nuage de points est dessiné sur le graphique donné en annexe. Les coordonnées de ces points sont données dans le tableau :

x	2,3	1,4	-0,6	2,9	-0,3	-0,8	0,8	0,1
y	3, 8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9

Ce nuage de points a la même allure que la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

On cherche à déterminer si ce nuage de points peut être ajusté par une courbe représentant une solution de l'équation différentielle (E).

On effectue pour cela le changement de variable : $z = (y-3)e^{x}$

1. Compléter le tableau donné en annexe avec les valeurs de z arrondies au dixième.
2. Construire sur papier millimétré le nuage de points de coordonnées $(x\ ;\ z)$. Que peut-on observer ?
3. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de z en x (on ne demande pas le détail des calculs ; les résultats numériques seront arrondis au centième).
4. Le nuage de points peut-il être ajusté par une courbe représentant une fonction solution de l'équation (E) ? Si oui, donner cette solution.

Exercice 2 (10 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats obtenus seront arrondis au centième

Dans un centre d'assistance par téléphone, chaque client doit patienter avant d'être mis en relation avec un conseiller.

Partie A

On admet que 5 % des clients attendent plus de 8 minutes.
Un sondage réalisé par ce centre téléphonique consiste à demander à 60 clients choisis au hasard s'ils ont attendu plus de 8 minutes. On suppose que les durées d'attente des clients sont indépendantes les unes des autres et que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

On note Y la variable aléatoire qui associe à cet échantillon, le nombre de clients ayant attendu plus de 8 minutes. On admet que Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0{,}05$.

On approche Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson.
Donner le paramètre de cette loi.
En utilisant la variable aléatoire Z, calculer une estimation de la probabilité qu'au moins 6 clients attendent plus de 8 minutes.

Partie B

Les clients se plaignant d'attendre trop longtemps, une enquête est alors effectuée sur un échantillon de 100 personnes pour vérifier la moyenne μ, exprimée en minutes, du temps d'attente.
Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Temps d'attente en minutes	[0 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 12[
Nombre de clients	13	16	19	17	15	15	5

On admet que la répartition du nombre de clients est régulière dans chacun des intervalles.

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cet échantillon (on utilisera les centres des intervalles pour effectuer les calculs).
2. On se propose de construire un test unilatéral pour vérifier si le temps d'attente moyen n'est pas supérieur à 4 minutes.
   On note D la variable aléatoire qui, à chaque client associe son temps d'attente, exprimé en minutes.
   La variable D suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\sigma = 2{,}4$.
   On désigne par $\bar{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 clients choisis au hasard associe la moyenne de leurs temps d'attente. Le nombre de clients est suffisamment élevé pour que l'on puisse assimiler ce choix de clients à un tirage avec remise.

   L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 4$.

   a) Déterminer l'hypothèse alternative H_1.

b) Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire Ð̀ suit la loi normale de moyenne 4 et d'écart-type 0,24.
Déterminer sous cette hypothèse le nombre réel h positif tel que : P (Ð̀ Â 4 + h) = 0,95.

c) En déduire la règle de décision de ce test.

d) D'après l'échantillon étudié, peut-on au seuil de 5 % conclure que la moyenne des temps d'attente n'est pas supérieure à 4 minutes ?

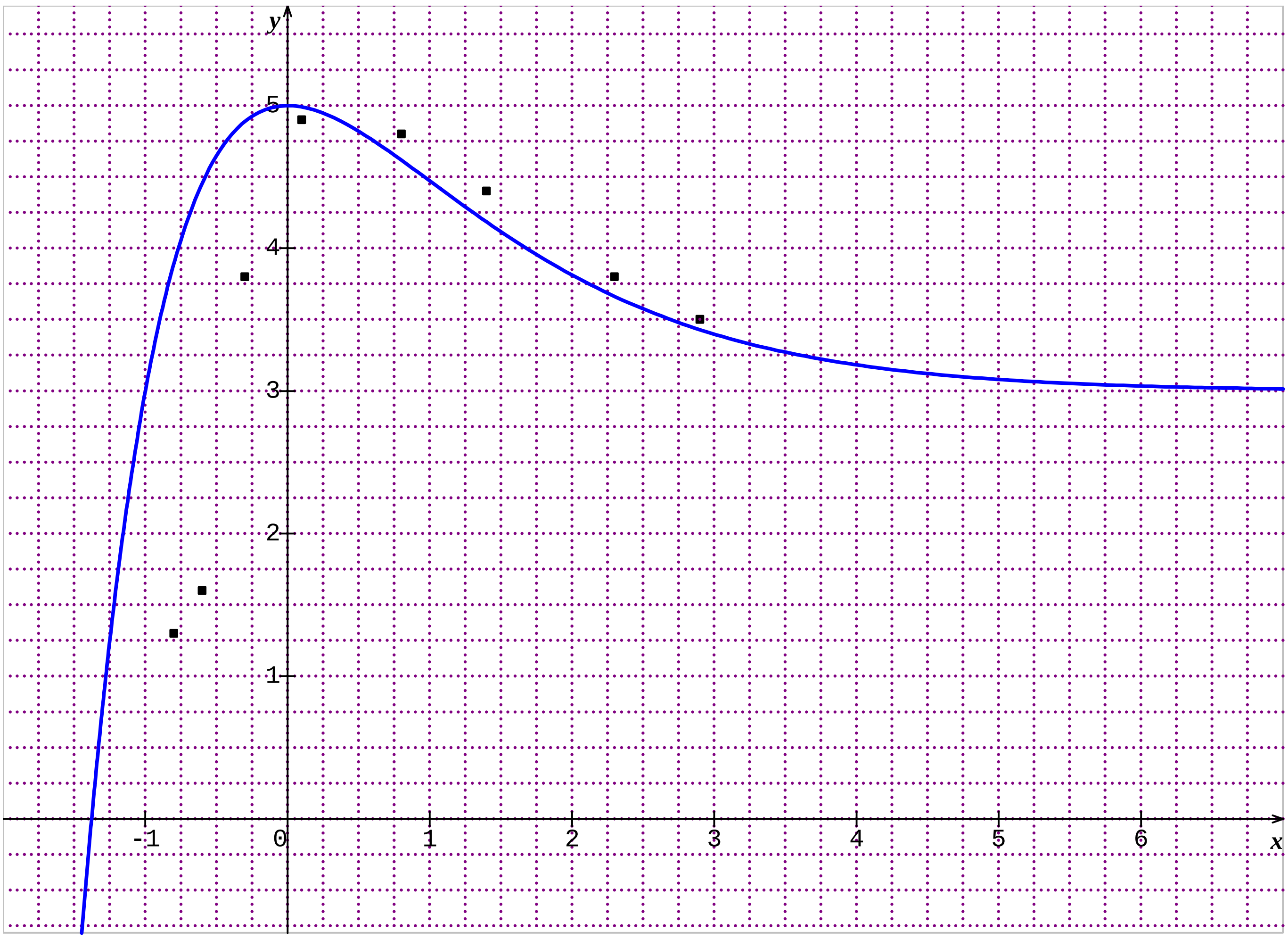
Annexe (à remettre avec la copie)

Exercice 1

Sur le graphique ci-dessous sont représentés :

- une courbe $\mathscr{C}$, utilisée dans la partie A de l'exercice 1.
- Un nuage de points utilisés dans la partie B de l'exercice 1.

(Les coordonnées des points de ce nuage sont données dans le tableau figurant sous le graphique)



Partie C

1. Coordonnées des points du nuage de points

x	2,3	1,4	-0,6	2,9	-0,3	-0,8	0,8	0,1
y	3, 8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9
$z = (y-3)e^{x}$								