BTS Industriels Groupement C
session 2006

Exercice 1 *(10 points)*

y désigne une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue y suivante : $y'' - 4y' + 3y = -3x - 2$.

Partie A

1. Résoudre sur l'ensemble des nombres réels, l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2. *a)* Soit a et b deux réels. On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels par $g(x) = ax + b$. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g soit une solution particulière de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
3. Déterminer la fonction f, solution particulière sur l'ensemble des nombres réels de l'équation (E), telle que : $f(0) = -1$ et $f''(0) = 9$.

Partie B

Soit la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - x - 2$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. En remarquant que, pour x différent de 0, $f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{3x}}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'ensemble des nombres réels.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques :
   - 4 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses,
   - 1 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

   Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x - 2$ au voisinage de $-\infty$.
5. Déterminer les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ selon les valeurs de x.
6. Tracer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.

Partie C

Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, du domaine compris entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$. Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième de $\mathcal{A}$.

Exercice 2 *(10 points)*

On donnera la valeur arrondie au millième de chacun des résultats de cet exercice.

Une entreprise fabrique des jouets en bois en grande série. On s'intéresse à l'une des pièces de ce jouet comportant une partie cylindrique permettant l'assemblage des différents éléments du jouet.

Partie A

Pour que l'assemblage soit réalisable, c'est-à-dire que la pièce étudiée soit conforme, le diamètre de la partie cylindrique doit être compris entre 13,7 mm et 14,2 mm.
Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe le diamètre de la partie cylindrique. On admet que X suit la loi normale $N(14\,;\,0{,}1)$.

Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production de l'entreprise soit conforme.

Partie B

Dans cette partie, on considère que 2,4 % des pièces de la production ne sont pas conformes. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 unités prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces non-conformes. On admet que la production de l'entreprise est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse. En donner le (ou les) paramètre(s).
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités ?
3. *a)* On approche la variable aléatoire Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.
   b) À l'aide de la variable aléatoire Z, calculer une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement trois pièces non conformes dans un lot de 100 unités.

Partie C

L'assemblage des pièces du jouet doit être définitif. Ainsi, la partie cylindrique de la pièce étudiée dans les parties ***A*** et ***B*** est enduite de colle avant l'assemblage.
Le jouet est destiné à des enfants de moins de 36 mois. Ces enfants ne doivent en aucun cas pouvoir arracher la pièce du jouet, celle-ci présentant un risque d'ingestion.
Pour cette raison, l'entreprise réalise un test d'arrachement sur des échantillons de 50 jouets prélevés au hasard. Ces prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise, compte tenu du grand nombre de jouets produits.
Soit $\overline{R}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 jouets, associe la résistance mécanique moyenne de l'assemblage. Cette résistance mécanique est exprimée en déca-newton, noté daN.
Soit r la résistance mécanique moyenne de l'ensemble des jouets produits par l'entreprise. On admet que $\overline{R}$ suit la loi $N\left(r\,;\,\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$.
On construit un test d'hypothèse unilatéral au risque de 1 %, destiné à savoir si la résistance mécanique moyenne des assemblages est égale à 10 daN.
On donne l'hypothèse alternative $H_1 : r > 10$.

1. Donner l'hypothèse H_0.
2. Sous l'hypothèse H_0, quelle est la loi suivie par $\overline{R}$?
3. Sous l'hypothèse H_0, calculer le réel h tel que $P\left(\overline{R} \leqslant 10+h\right) = 0{,}99$.
4. Quelle est la règle de décision du test ?
5. *a)* Sur un échantillon de 50 jouets, on a relevé les résistances exprimées dans le tableau ci-dessous. Calculer la poyenne r_e et l'écart type σ_e de cet échantillon. *Aucune justification de ces résultats n'est demandée.*

Résistance (daN)	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12	12,5	13
Effectifs	1	0	1	3	9	9	10	9	3	2	2	1

   b) Au seuil de risque de 1 % et d'après cet échantillon, les jouets produits par cette entreprise sont-ils assez solides ?