BTS Industriels Groupement C
session 2007

Exercice 1 *(10 points)*

Le but du problème est l'étude de la demande et de l'offre pour un nouveau produit de grande consommation. Une étude statistique a donné les résultats suivants où :
x désigne le prix unitaire en euros du produit ;
y désigne la demande (la quantité de produit demandée par les consommateurs), en milliers d'unités;
z désigne l'offre (la quantité de produit offerte sur le marché par les producteurs), en milliers d'unités.

x en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y en milliers	7,8	6,1	4,7	3,7	3	2,5	2,2	2
z en milliers	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6

Partie A. Étude de la demande

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}4y = 0{,}4x - 1$ où y désigne une fonction de la variable *x*, définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels et y' sa dérivée.

1. Résoudre sur l'ensemble des nombres réels, l'équation différentielle : $y' + 0{,}4y = 0$.
2. *a)* Déterminer les réels *a* et *b* pour que la fonction *g*, définie pour tout *x* réel par $g(x) = ax + b$, soit une solution particulière de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la fonction *f*, solution sur l'ensemble des nombres réels de l'équation différentielle (E), telle que f(0)=10.
4. On appelle *d* la fonction demande, en milliers d'unités pour un prix de *x* euros, définie sur l'intervalle [0,5 ; 4] par $y = d(x)$. On admet que, pour tout *x* de l'intervalle [0,5 ; 4],
$$d(x) = 15e^{-0{,}4x} + x - 5$$
   a) Soit d' la fonction dérivée de la fonction *d*. Déterminer $d'(x)$ et en déduire les variations de la fonction *d* sur l'intervalle [0,5 ; 4].
   b) Le plan est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On admet que le tableau de valeurs ci-dessus est le tableau de valeurs de la fonction *d* définie par $y = d(x)$.
   Construire la courbe C_d représentative de la fonction *d* sur l'intervalle [0,5 ; 4].

Partie B. Étude de l'offre

1. *a)* Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
z	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6
$Z = e^z$								

   b) Donner une équation de la droite de régression de *Z* en *x* par la méthode des moindres carrés sous la forme $Z = ax + b$ où *a* et *b* seront arrondis au dixième.
   c) En déduire une expression de *z* en fonction de *x*.

2. On appelle h la fonction offre, en milliers d'unités pour un prix de x euros, définie sur l'intervalle [0,5;4] par $z = h(x)$. On admet que, pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 4], $h(x) = \ln(3x + 0{,}9)$.
   a) Soit h' la fonction dérivée de la fonction h. Déterminer $h'(x)$ et en déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle [0,5 ; 4].
   b) Conbstruire la courbe C_h représentative de la fonction h dans le même repère que la courbe C_d . *On pourra utiliser le tableau de valeurs ci-dessus.*
   c) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du prix de vente en euros, à 10 centimes près, pour lequel la demande est égale à l'offre.

Exercice 2 ***(10 points)***

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une entreprise produit en grande série trois modèles de stylos notés, M_1, M_2 et M_3.
Un stylo peut être conforme ou non-conforme.

Partie A. Dans cette partie, on s′intéresse aux stylos du modèle M_1.

Un des stocks est consitué de stylos du modèle M_1, provenant de deux chaînes de production C_1 et C_2. Ces chaînes produisent respectivement 40 % et 60 % du stock. On constate que la chaîne C_1 produit 6 % de stylos non-conformes.
On prélève au hasard un stylo dans ce stock.

1. Quelle est la probabilité de prélever au hasard un stylo provenant de la chaîne C_1 et non-conforme ?
2. On appelle t le pourcentage de stylos non-conformes produits par la chaîne C_2. Déterminer t pour que la probabilité de prélever au hasard un stylo non-conforme dans le stock de stylos du modèle M_1 soit égale à 0,09.

Partie B. Dans cette partie, on s′intéresse aux stylos du modèle M_2.

Un autre stock est constitué de stylos du modèle M_2. On admet que 3 % des stylos de ce stock sont non-conformes. On prélève au hasard, dans ce stock, un lot de 50 stylos. On admet que ce stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 stylos, associe le nombre de stylos non-conformes.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X. Justifier la réponse et préciser les paramètres.
2. *Dans cette question les résultats seront arrondis à 10^{-3}.*
   a) Quelle est la probabilité que ce lot contienne exactement 2 stylos non-conformes ?
   b) Quelle est la probabilité que ce lot contienne au moins 2 stylos non-conformes ?
3. *a)* On approche la variable aléatoire X par une variable Y qui suit une loi de Poisson. Donner le paramètre de cette loi.
   b) À l'aide de la variable aléatoire Y, donner une estimation de la probabilité qu'il y ait exactement 47 stylos conformes dans ce lot.

Partie C. Dans cette partie, on s′intéresse à la masse des stylos du modèle M_3.

Un autre stock est constitué de stylos du modèle M_3. ce stock est conforme quant à la masse si la moyenne des masses des stylos de ce stock est de 11 grammes. Pour vérifier cette affirmation on construit un test d'hypothèse bilatéral au risque de 10 %.

1. *a)* Quelle est l'hypothèse nulle H_0 ? Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?

   b) On note $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 stylos prélevés dans ce stock associe la moyenne des masses des stylos de ce stock. On considère ces prélèvements comme des tirages avec remise car ce stock est très important. On suppose que, sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 11 et d'écart-type 0,4.

   Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que $P\left(11 - h \leq \overline{Z} \leq 11 + h\right) = 0{,}9$.

   c) Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

2. On prélève un échantillon aléatoire de 100 stylos et on constate que la moyenne des masses des stylos de cet échantillon est de 10,6 grammes. Peut-on au risque de 10 % conclure que le stock de stylos du modèle M_3 est conforme quant à la masse ?