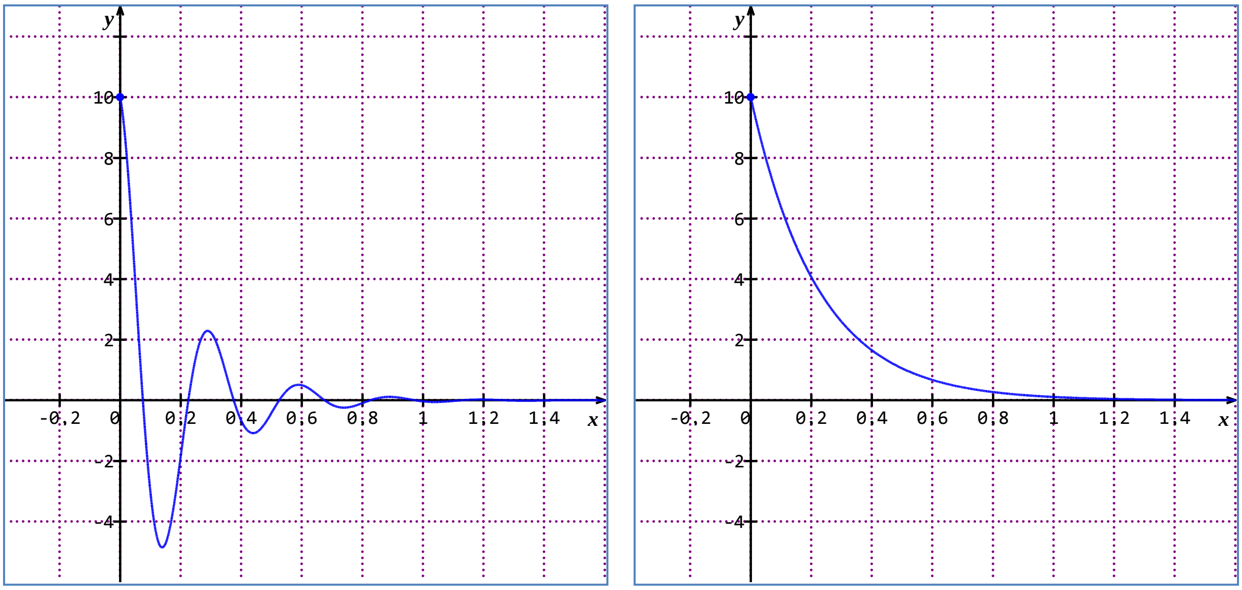
BTS Industriels – Groupement C
13 mai 2015

Exercice 1 (9 points)

Une étude est menée concernant la suspension de véhicules. On considère que la suspension d'un véhicule est constituée, au niveau de chaque roue, d'un ressort et d'un amortisseur (voir figure). Pour un véhicule donné, le déplacement vertical des suspensions, en cas de sollicitation, dépend du coefficient d'amortissement λ.

Partie 1 : Différents cas d'amortisseurs

1. Comparaison de deux amortisseurs
   On modélise le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre (exprimé en centimètres), en fonction du temps (exprimé en secondes) par la fonction f dont la représentation graphique dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous, pour deux valeurs différentes, λ_1 et λ_2, du coefficient d'amortissement.
   Lorsque t représente un temps exprimé en secondes, $f(t)$ représente le déplacement vertical du centre d'inertie à l'instant t.



Courbe C_1 avec le coefficient d'amortissement λ_1 Courbe C_2 avec le coefficient d'amortissement λ_2

   a) Dans chacun des deux cas, décrire le comportement du véhicule à l'aide du graphique.
      - Dans le premier cas, le centre d'inertie fait plusieurs oscillations de part et d'autre du point d'équilibre avant de s'immobiliser.
      - Dans le second cas, le centre d'inertie atteint progressivement son point d'équilibre sans faire d'oscillations.

   b) Quel coefficient d'amortissement est-il plus intéressant d'avoir ? Expliquer.
      Le second type d'amortissement est plus intéressant car les passagers sont moins "secoués"…

2. Dans cette question, on s'intéresse à un autre d'amortisseur. Pour la valeur du coefficient d'amortissement qui lui correspond, le véhicule est ramené à sa position d'équilibre en un temps minimum et sans oscillation. On parle alors d'amortissement critique. On admet que la fonction donnant le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre, en fonction du temps, est alors solution de l'équation différentielle (E) :
   $$y''+40y'+400y=0$$
   où y désigne une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

   a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $\quad y''+40y'+400y=0$.

On rappelle les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
$ay''+by'+cy=0$ Équation caractéristique : $ar^2+bt+c=0$ de discriminant Δ	Si $\Delta>0$, $f(t)=\lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta=0$, $f(t)=(\lambda t+\mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta<0$, $f(t)=[\lambda\cos(\beta t)+\mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

L'équation caractéristique associée à l'équation (E) est : $r^2+40r+400=0$

Son discriminant est : $\Delta=b^2-4ac=40^2-4(1)(400)=0$

Elle admet donc une seule solution : $r=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{40}{2}=-20$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc de la forme :

$$\boxed{y=(\lambda t+\mu)e^{-20t}}$$

où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

b) Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie $f(0)=10$ et $f'(0)=0$.

La condition $f(0)=10$ équivaut à : $(\lambda\times 0+\mu)e^0=10$, donc $\boxed{\mu=10}$

On a donc $f(t)=(\lambda t+10)e^{-20t}$

Donc, en posant : $\begin{cases}u(t)=\lambda t+10\\ v(t)=e^{-20t}\end{cases}$, on a : $\begin{cases}u'(t)=\lambda\\ v'(t)=-20e^{-20t}\end{cases}$

Donc : $f'(t)=\lambda e^{-20t}-20(\lambda t+10)e^{-20t}$

La condition $f'(0)=0$ équivaut alors à : $\lambda e^0-20(0+10)e^0=0$, donc $\lambda-200=0$. Donc $\boxed{\lambda=200}$

La solution cherchée, qui remplit les 2 conditions initiales, est donc : $\boxed{f(t)=(200t+10)e^{-20t}}$

Partie 2 : Étude dans le cas d'un amortissement critique

On considère la fonction f dérivable sur $[0\,;+\infty[$, définie par : $f(t)=(200t+10)e^{-20t}$ dont la courbe représentative C_f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

1. Par lecture graphique, déterminer les variations de f ainsi que les coefficients directeurs des tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses respectives 0 et 0,4.

D'après l'allure de la courbe C_f, la fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Aux points d'abscisses 0 et 0,4, la pente de la courbe est nulle (la tangente est parallèle à l'axe des abscisses).

Donc les coefficients directeurs des tangentes sont égaux à 0.

2. a) Démontrer que pour tout t de $[0\,;+\infty[$, on a : $f'(t)=-40000te^{-20t}$.

On pose : $\begin{cases}u(t)=200t+10\\ v(t)=e^{-20t}\end{cases}$, donc $\begin{cases}u'(t)=200\\ v'(t)=-20e^{-20t}\end{cases}$

On en déduit : $f'(t)=200e^{-20t}-20(200t+10)e^{-20t}$

$f'(t)=200e^{-20t}-(4000t+200)e^{-20t}$

$f'(t)=200e^{-20t}-4000te^{-20t}-200e^{-20t}$

On a bien : $\boxed{f'(t)=-4000te^{-20t}.}$

b) Indiquer, en justifiant, si les trois résultats obtenus graphiquement à la question 1 sont confirmés.

On sait que, pour tout réel x, $e^x>0$.

Par conséquent, pour tout réel t : $e^{-20t}>0$

Par ailleurs, si $t\in[0\,;+\infty[$, alors $-4000t\leqslant 0$

Donc, par produit : $-4000te^{-20t}\leqslant 0$

Donc : $f'(t)\leqslant 0$

Le résultat « la fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ » est donc confirmé.

De même, on a clairement : $f'(0)=0$.

$\boxed{\text{Donc la tangente au point d'abscisse 0 a bien pour coefficient directeur 0.}}$

En revanche, on a : $f'(0{,}4) > 0$.

$\boxed{\text{Donc le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0,4 n'est pas nul (mais presque)}}$

3. On admet que cette fonction f est celle qui donne le déplacement vertical par rapport à sa position d'équilibre, en centimètre, du centre d'inertie du véhicule équipé de l'amortisseur étudié à la question 2. Partie 1, en fonction du temps, exprimé en seconde.
   Déterminer graphiquement au bout de combien de temps le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre sera inférieure au dixième du déplacement initial.
   On sait que $f(0) = 10$.
   Cela revient donc à résoudre l'équation $f(t) = 1$ car $\frac{1}{10} \times 10 = 1$.
   Graphiquement on peut estimer la solution à une valeur légèrement inférieure à 0,2 : 0,195 seconde.
   (À mon avis, mais je n'engage que moi, toute réponse comprise dans l'intervalle [0,19 ; 0,20] sera acceptée)

4. On donne ci-dessous une copie d'écran obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

```
1 integrer((200*t+10)*exp(-20*t),t)
      exp(-20*t)*(-4000*t-400)
      ------------------------
                400
2 simplifier(((-4000*t-400)*exp(-20*t))/400)
      -10*t*exp(-20*t)-exp(-20*t)
3 factoriser(-10*t*exp(-20*t)-exp(-20*t))
      -exp(-20*t)*(10*t+1)
```

   a) Que représente la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $F(t) = -(10t+1)\mathrm{e}^{-20t}$ relativement à la fonction f ?
      D'après les commandes effectuées, la fonction F représente une primitive de la fonction f.
   b) En déduire le déplacement moyen du centre d'inertie du véhicule entre les instants $t = 0$ et $t = 0{,}4$.
      La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 0,4] est $\frac{1}{0{,}4}\int_0^{0{,}4} f(t)\,\mathrm{d}t$.
      Donc le déplacement moyen du centre d'inertie du véhicule entre les instants t=0 et t=0,4 est :
      $\frac{1}{0{,}4}\left(F(0{,}4) - F(0)\right)$
      Or $\frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$; $F(0{,}4) = -5\mathrm{e}^{-8}$; $F(0) = -1$
      $\boxed{\text{Donc le déplacement moyen est :} 2{,}5\left(1 - 5\mathrm{e}^{-8}\right) \approx 2{,}5 \text{ cm.}}$

Exercice 2 (11 points)

Dans une société italienne de fabrication de carrelage, on effectue différents types de tests de contrôle de qualité afin de vérifier si le carrelage fabriqué est conforme aux normes en vigueur.

Partie 1

À l'issue de tests, la société estime qu'il y a 3 % de carreaux défectueux dans la production. Soit X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 carreaux prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de carreaux défectueux. La production étant importante, on peut assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Pour chacun des 100 carreaux prélevés, il y a 2 issues (épreuve de Bernoulli) :
   - le carreau est défectueux, avec une probabilité $p = 0{,}03$
   - le carreau est conforme, avec une probabilité $1 - p = 0{,}97$

   Comme le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, on peut considérer qu'il est constitué d'une suite de 100 épreuves identiques et indépendantes.

Par conséquent, la variable X qui compte le nombre de carreaux défectueux, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}03$: $\mathscr{B}(100\,;0{,}03)$.

2. On prélève un lot de 100 carreaux.
   Déterminer la probabilité qu'il y ait :

   a) Deux carreaux défectueuxdans un lot. $\boxed{p(X=2)=\binom{100}{2}\times 0{,}03^2\times 0{,}97^{98}\approx 0{,}225}$

   b) Au plus huit carreaux défectueux dans un lot. $\boxed{p(X\leqslant 8)\approx 0{,}997}$

Partie 2

Un lot de carreaux de la société italienne est livré chez un fournisseur. À l'arrivée, celui-ci constate que certains carreaux présentent des défauts qui peuvent être de deux types :

- premier type de défaut : le carreau a un défaut de fabrication,
- deuxième type de défaut : le carreau a subi des dommages pendant le transport.

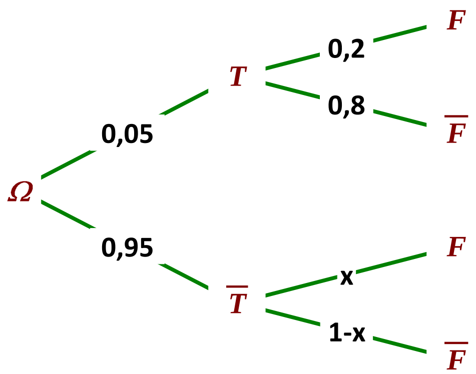
Une étude statistique a permis d'établir que dans le lot livré, il y a 5% de carreaux qui ont subi des dommages lors du transport et parmi ceux-ci 20% présentent un défaut de fabrication.

Soit T l'évènement : « le carreau a subi des dommages pendant le transport ».
F l'évènement : « le carreau a un défaut de fabrication ».

Calculer la probabilité qu'un carreau prélevé dans le lot livré ne présente aucun défaut.
On rappelle que 3% des carreaux produits dans la société italienne ont un défaut de fabrication.

On peut représenter la situation soit avec un tableau, soit avec un arbre :

	T	$\overline{T}$	Total
F	$20\%\times 5\% = 1\%$	$3\%-1\% = 2\%$	3%
$\overline{F}$	$5\%-1\% = 4\%$	$97\%-4\% = 93\%$	$100\%-3\% = 97\%$
Total	5%	$100\%-5\% = 95\%$	100%



Dans le cas de l'arbre, la valeur de x peut se calculer ainsi :

$p(F)=p(T\cap F)+p\left(\overline{T}\cap F\right)$

Donc $0{,}03=0{,}05\times 0{,}2+0{,}95\times x$, ce qui donne $x=\dfrac{0{,}03-0{,}05\times 0{,}2}{0{,}95}=\dfrac{2}{95}$

La probabilité cherchée est : $\boxed{p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right)=0{,}93}$ par lecture directe du tableau.

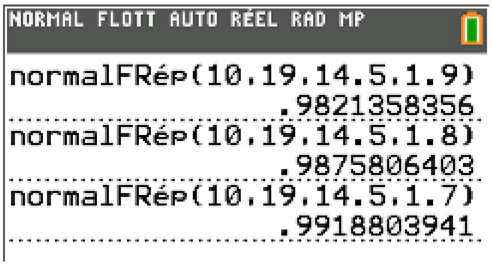
ou encore, avec l'arbre : $p\left(\overline{T}\cap\overline{F}\right)=0{,}95\times(1-x)=0{,}95\times\left(1-\dfrac{2}{95}\right)=0{,}93.$

Partie 3

La norme DIN 51130 permet d'évaluer le caractère antidérapant d'un sol.
Après des tests préliminaires, servant d'étalonnage, un personne chaussée de chaussures normalisées marche en avant puis en arrière sur un plan incliné recouvert du sol à tester. Le plan est recouvert d'huile et progressivement incliné jusqu'à ce que la personne glisse. Cette méthode détermine l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement du revêtement.
La société italienne effectue une série de tests sur les carreaux qu'elle produit, dont celui concernant la résistance au glissement. On désigne par G la variable aléatoire qui, à tout carreau prélevé au hasard dans la production, associe

l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement selon la norme DIN 51130. On admet que G suit une loi normale d'espérance m et d'écart type σ.

1. Dans cette question, on suppose que $m = 14{,}5$ et $\sigma = 2$.
   Un carreau est classé R_{10} si l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise sa résistance au glissement selon la norme DIN 51130 est compris entre 10 et 19 degrés.
   Calculer la probabilité qu'un carreau prélevé au hasard dans la production soit conforme à la classification R_{10}
   Avec la calculatrice, on a : $\boxed{p(10 \leqslant G \leqslant 19) \approx 0{,}976}$

2. Dans cette question, on suppose que $m = 14{,}5$ et on cherche à déterminer σ.
   Déterminer la valeur arrondie à 10^{-1} près de σ telle que que $p(10 \leqslant G \leqslant 19) = 0{,}99$.
   On peut procéder soit par tâtonnements, soit en utilisant le coefficient connu, $\alpha = 2{,}58$, pour un intervalle de confiance à 99% (car l'intervalle [10 ; 19] est centré sur la moyenne 14,5) :
   $p(m - 2{,}58\sigma \leqslant G \leqslant m + 2{,}58\sigma) = 0{,}99$
   On en déduit : $m + 2{,}58\sigma = 19$
   donc : $14{,}5 + 2{,}58\sigma = 19$
   donc : $\boxed{\sigma = \dfrac{4{,}5}{2{,}58} = 1{,}7 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}}$
   En procédant par tâtonnements, on arrive au même résultat avec la calculatrice :
   

3. La société italienne réalise dorénavant un nouveau type de finition sur le carrelage pour lequel elle pense que l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement sera supérieur à 14,5°. Elle décide de réaliser un test afin de vérifier la véracité de cette amélioration de la résistance au glissement. Pour cela, un test unilatéral de validité d'hypothèse est élaboré, destiné à savoir si l'on peut considérer au seuil de 3% que l'angle moyen d'inclinaison maximale sur la nouvelle production de carrelage est strictement supérieur à 14,5°
   Soit $\overline{G}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 carrelages de la production, associe la valeur moyenne de l'angle d'inclinaison maximale lors du test. On admet que $\overline{G}$ suit la loi normale d'espérance m et d'écart type $= 0{,}2$.
   On choisit l'hypothèse alternative H_1 : « $m > 14{,}5$ »
   a) Donner l'hypothèse nulle. H_0 : « $m = 14{,}5$ »
   b) Sous cette hypothèse nulle, on obtient avec un tableur, les résultats donnés en annexe.
      Déterminer approximativement la valeur de a tel que $p\left(\overline{G} \leqslant a\right) = 0{,}97$
      D'après ce tableau, on lit $\boxed{a \approx 14{,}88}$
   c) Énoncer la règle de décision de ce test.
      D'après ce qui précède la zone critique est $[14{,}88 ; +\infty[$.
      Si, dans un échantillon de taille 100, la moyenne observée est dans la zone critique, alors on refuse l'hypothèse nulle H_0 et on accepte l'hypothèse alternative H_1.
   d) Lors d'un test effectué sur un prélèvement de 100 carreaux dans la production, on obtient les angles d'inclinaison maximale suivants :

Angle d'inclinaison maximale (en degrés)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectifs	2	3	5	14	20	21	15	15	5

   Peut-on estimer, au seuil de 3%, que la nouvelle finition améliore l'angle d'inclinaison maximale ?

Avec la calculatrice, on obtient la moyenne : $\bar{x} = 14{,}75$.

Ce résultat n'appartient pas à la zone critique, donc on accepte l'hypothèse nulle H_0 : $m = 14{,}5$.

On peut donc estimer, au seuil de 3%, que la nouvelle finition n'améliore pas l'angle d'inclinaison maximale.

e) Des observations futures prouveront qu'en fait, pour les échantillons de 100 carreaux produits selon le nouveau procédé de finition, la variable $\bar{G}$ suit une loi normale d'espérance $m = 15$ et d'écart type $\sigma = 0{,}2$.

Dans ces conditions, on obtient : $p\left(\bar{G} < 14{,}88\right) \approx 0{,}27$

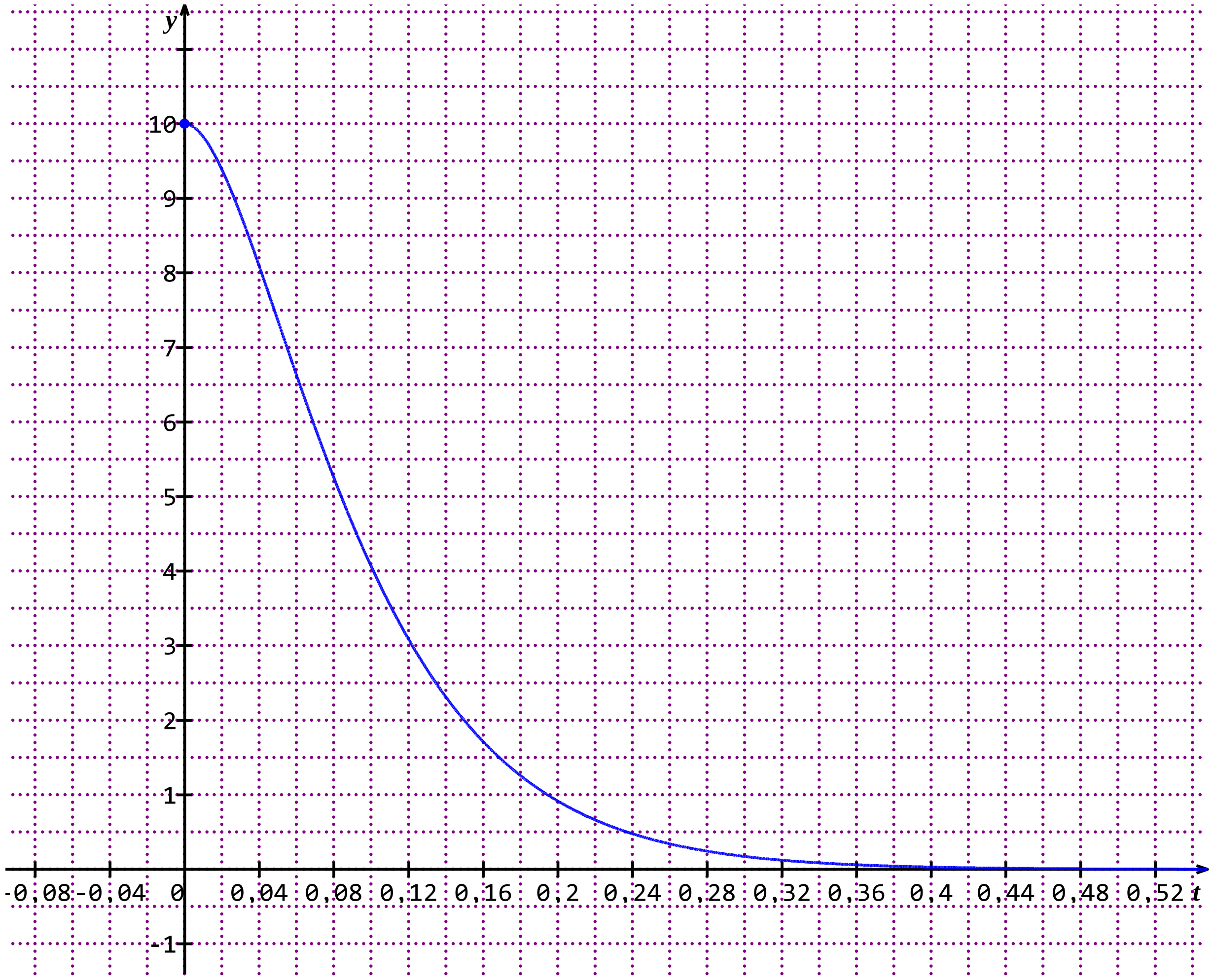
Interpréter ce résultat.

On peut dire que notre échantillon, sur lequel on a mesuré une moyenne de 14,75, fait partie des 27% des échantillons de taille 100 pour lesquels la moyenne est inférieure à 14,88.

On peut donc considérer, que la réalisation de plusieurs tests aurait montré que l'hypothèse alternative était acceptable au seuil de 3%.

Annexe 1 :

Exercice 1, partie 2



Annexe 2 :

Exercice 2, Partie 3 question 3.b)

B2 =LOI.NORMALE(A2;14,5;0,2;1)

	A	B	C	D	E	F
1	x	$p(X \leq x)$				
2	14,75	0,89435				
3	14,76	0,90320				
4	14,77	0,91149				
5	14,78	0,91924				
6	14,79	0,92647				
7	14,8	0,93319				
8	14,81	0,93943				
9	14,82	0,94520				
10	14,83	0,95053				
11	14,84	0,95543				
12	14,85	0,95994				
13	14,86	0,96407				
14	14,87	0,96784				
15	14,88	0,97128				
16	14,89	0,97441				
17	14,9	0,97725				
18	14,91	0,97982				
19	14,92	0,98214				
20	14,93	0,98422				
21	14,94	0,98610				
22	14,95	0,98778				
23	14,96	0,98928				
24	14,97	0,99061				